2. Теорема косинусов

Из первого признака равенства треугольников следует, что две стороны и угол между ними однозначно определяют треугольник. А значит, по указанным элементам можно, например, найти третью сторону треугольника. Как это сделать, показывает следующая теорема.

Теорема 2.1 (теорема косинусов). ***Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними.***

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Докажем, например, что

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Возможны три случая:

1) угол A острый;

2) угол A тупой;

3) угол A прямой.

Первый случай. Пусть угол A острый. Тогда хотя бы один из углов B или C является острым.

● Пусть $\angle C < 90°$. Проведем высоту BD. Она будет полностью принадлежать треугольнику ABC (рис. 2.1).

В прямоугольном треугольнике ABD:

$$BD = AB \cdot \sin A, \quad AD = AB \cdot \cos A.$$

В прямоугольном треугольнике BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$

$$= BD^2 + (AC - AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 =$$
$$= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A =$$
$$= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

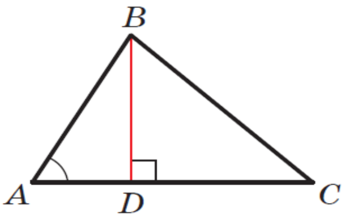

Рис. 2.1

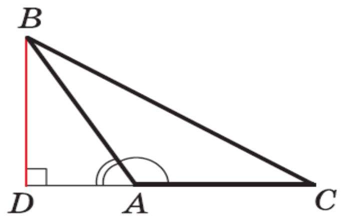

Рис. 2.2

● Пусть $\angle B < 90°$. Проведем высоту треугольника ABC из вершины C. Она будет полностью принадлежать треугольнику ABC. Доказательство для этого случая аналогично рассмотренному. Проведите его самостоятельно.

Второй случай. Пусть угол A тупой. Проведем высоту BD треугольника ABC (рис. 2.2).

В прямоугольном треугольнике ABD: $BD = AB \cdot \sin \angle BAD =$

$$= AB \cdot \sin (180° - \angle BAC) = AB \cdot \sin \angle BAC,$$
$$AD = AB \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot \cos (180° - \angle BAC) = -AB \cdot \cos \angle BAC.$$

В прямоугольном треугольнике BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$

$$= BD^2 + (AC + AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 =$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC.$$

Третий случай. Пусть угол A прямой (рис. 2.3). Тогда $\cos A=0$. Надо доказать, что $BC^2=AB^2+AC^2$. Это равенство следует из теоремы Пифагора для треугольника ABC. ◄

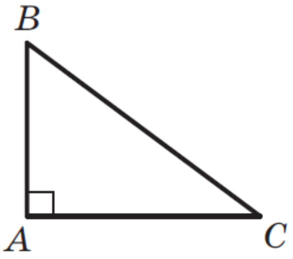

Рис. 2.3

Доказательство теоремы косинусов показывает, что *теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов, а теорема косинусов является обобщением теоремы Пифагора.*

Если воспользоваться обозначениями для длин сторон и величин углов треугольника ABC (см. форзац), то, например, для стороны, длина которой равна a, можно записать:

$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha}$$

С помощью теоремы косинусов, зная три стороны треугольника, можно определить, является ли он остроугольным, тупоугольным или прямоугольным.

Теорема 2.2 (следствие из теоремы косинусов). ***Пусть a, b и c — длины сторон треугольника, причем a — длина его наибольшей стороны. Если $a^2<b^2+c^2$, то треугольник является остроугольным. Если $a^2>b^2+c^2$, то треугольник является тупоугольным. Если $a^2=b^2+c^2$, то треугольник является прямоугольным.***

Доказательство. По теореме косинусов

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

Отсюда $2bc\cos\alpha=b^2+c^2-a^2$.

Пусть $a^2<b^2+c^2$. Тогда $b^2+c^2-a^2>0$. Отсюда $2bc\cos\alpha>0$, то есть $\cos\alpha>0$. Поэтому угол α острый.

Поскольку a — длина наибольшей стороны треугольника, то против этой стороны лежит наибольший угол, который, как мы доказали, является острым. Следовательно, в этом случае треугольник является остроугольным.

Пусть $a^2>b^2+c^2$. Тогда $b^2+c^2-a^2<0$. Отсюда $2bc\cos\alpha<0$, то есть $\cos\alpha<0$. Поэтому угол α тупой. Следовательно, в этом случае треугольник является тупоугольным.

Пусть $a^2=b^2+c^2$. Тогда $2bc\cos\alpha=0$. Отсюда $\cos\alpha=0$. Следовательно, $\alpha=90°$. В этом случае треугольник является прямоугольным. ◄

Задача 1. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

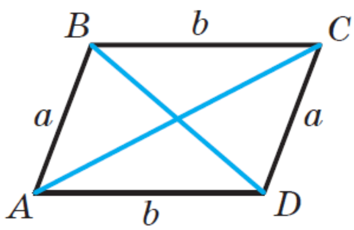

Рис. 2.4

Решение. На рисунке 2.4 изображен параллелограмм $ABCD$. Пусть $AB=CD=a$, $BC=AD=b$, $\angle BAD=\alpha$, тогда $\angle ADC=180°-\alpha$. Из треугольника ABD по теореме косинусов получаем:

$$BD^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha. \qquad (1)$$

Из треугольника ACD по теореме косинусов получаем:

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos(180°-\alpha).$$ Отсюда

$$AC^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha. \qquad (2)$$

Сложив равенства (1) и (2), получим:

$$BD^2+AC^2=2a^2+2b^2.$$ ◀

Задача 2. В треугольнике ABC сторона AB на 4 см больше стороны BC, $\angle B=120°$, $AC=14$ см. Найдите стороны AB и BC.

Решение. По теореме косинусов

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B.$$

Пусть $BC=x$ см, $x>0$, тогда $AB=(x+4)$ см.

Имеем:

$$14^2=(x+4)^2+x^2-2x(x+4)\cos 120°;$$

$$196=x^2+8x+16+x^2-2x(x+4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$196=2x^2+8x+16+x(x+4);$$

$$3x^2+12x-180=0;$$

$$x^2+4x-60=0;$$

$$x_1=6;\ x_2=-10.$$

Корень -10 не удовлетворяет условию $x>0$.

Следовательно, $BC=6$ см, $AB=10$ см.

Ответ: 10 см, 6 см. ◀

Задача 3. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $CD:AD=1:2$. Найдите отрезок BD, если $AB=14$ см, $BC=13$ см, $AC=15$ см.

Решение. По теореме косинусов из треугольника ABC (рис. 2.5) получаем:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C.$$

Отсюда $\cos C=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=$

$$=\frac{15^2+13^2-14^2}{2\cdot15\cdot13}=\frac{225+169-196}{2\cdot15\cdot13}=\frac{33}{65}.$$

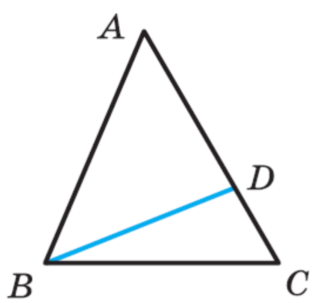

Рис. 2.5

Поскольку $CD:AD=1:2$, то

$$CD=\frac{1}{3}AC=5\ \text{(см)}.$$

Тогда из треугольника BCD получаем:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \frac{33}{65} = 128.$$

Следовательно, $BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $8\sqrt{2}$ см. ◀

Задача 4. Две стороны треугольника равны 23 см и 30 см, а медиана, проведенная к большей из известных сторон, — 10 см. Найдите третью сторону треугольника.

Решение. Пусть в треугольнике ABC известно, что $AC=23$ см, $BC=30$ см, отрезок AM — медиана, $AM=10$ см.

На продолжении отрезка AM за точку M отложим отрезок MD, равный медиане AM (рис. 2.6). Тогда $AD=20$ см.

В четырехугольнике $ABDC$ диагонали AD и BC точкой M пересечения делятся пополам ($BM=MC$ по условию, $AM=MD$ по построению). Следовательно, четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм.

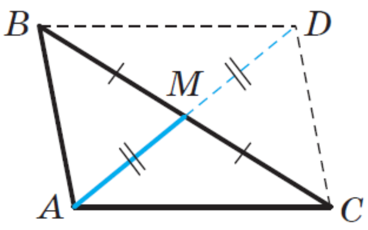

Рис. 2.6

Так как сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон (см. ключевую задачу 1), то

$$AD^2+BC^2=2\ (AB^2+AC^2).$$

Тогда

$$20^2+30^2=2\ (AB^2+23^2);$$
$$400+900=2\ (AB^2+529);$$
$$AB^2=121;$$
$$AB=11 \text{ см}.$$

Ответ: 11 см. ◀