3. Теорема синусов

При доказательстве ряда теорем и решении многих задач применяют следующую лемму.

Лемма. ***Хорда окружности равна произведению диаметра и синуса любого вписанного угла, опирающегося на эту хорду.***

Доказательство. На рисунке 3.1 отрезок MN — хорда окружности с центром в точке O. Проведем диаметр MP. Тогда $\angle MNP = 90°$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр. Пусть величина вписанного угла MPN равна α. Тогда из прямоугольного треугольника MPN получаем:

$$MN = MP \sin \alpha. \qquad (1)$$

Все вписанные углы, опирающиеся на хорду MN, равны α или $180° - \alpha$. Следовательно, их синусы равны. Поэтому полученное равенство (1) справедливо для всех вписанных углов, опирающихся на хорду MN. ◄

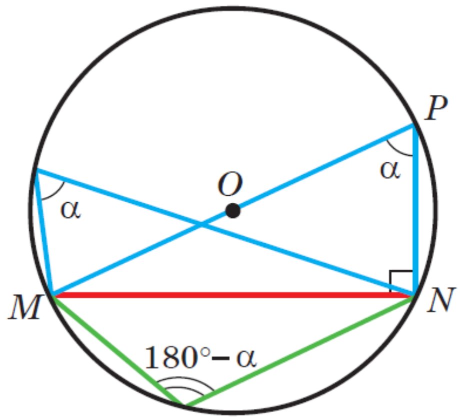

Рис. 3.1

Из второго признака равенства треугольников следует, что сторона и два прилежащих к ней угла однозначно определяют треугольник. Следовательно, по указанным элементам можно найти две другие стороны треугольника. Как это сделать, подсказывает следующая теорема.

Теорема 3.1 (теорема синусов). ***Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.***

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Докажем, что

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Пусть радиус описанной окружности треугольника ABC равен R. Тогда согласно лемме $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. Отсюда

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R}$$ ◄

Следствие. ***Радиус окружности, описанной около треугольника, можно вычислить по формуле***

$$\boxed{\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{a}}{2\sin\alpha},}$$

где a — длина стороны треугольника, α — величина противолежащего этой стороне угла.

Задача 1. В треугольнике ABC известно, что $AC=\sqrt{2}$ см, $BC=1$ см, $\angle B=45°$. Найдите угол A.

Решение. По теореме синусов

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}.$$

Тогда

$$\sin A = \frac{BC\sin B}{AC} = \frac{1\cdot\sin 45°}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $BC<AC$, то $\angle A<\angle B$. Следовательно, угол A — острый. Отсюда, учитывая, что $\sin A = \frac{1}{2}$, получаем: $\angle A=30°$.

Ответ: 30°. ◄

Задача 2. В треугольнике ABC известно, что $AC=\sqrt{2}$ см, $BC=1$ см, $\angle A=30°$. Найдите угол B.

Решение. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$. Тогда

$$\sin B = \frac{AC\sin A}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Поскольку $BC<AC$, то $\angle A<\angle B$. Тогда угол B может быть как острым, так и тупым. Отсюда $\angle B=45°$ или $\angle B=180°-45°=135°$.

Ответ: 45° или 135°. ◄

Задача 3. На стороне AB треугольника ABC отметили точку D так, что $\angle BDC=\gamma$, $AD=m$ (рис. 3.2). Найдите отрезок BD, если $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$.

Решение. Угол BDC — внешний угол треугольника ADC. Тогда $\angle ACD+\angle A=\angle BDC$, отсюда $\angle ACD=\gamma-\alpha$.

Из треугольника ADC по теореме синусов получаем:

$$\frac{CD}{\sin\angle CAD} = \frac{AD}{\sin\angle ACD}.$$

Следовательно,

$$CD = \frac{AD \sin \angle CAD}{\sin \angle ACD} = \frac{m \sin \alpha}{\sin (\gamma - \alpha)}.$$

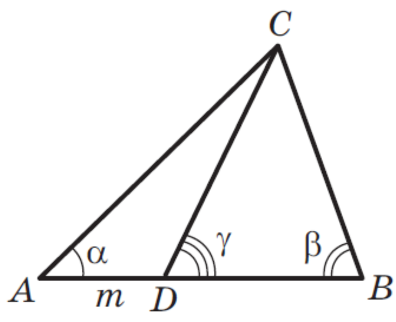

Рис. 3.2

Из треугольника BCD по теореме синусов получаем:

$$\frac{BD}{\sin \angle BCD} = \frac{CD}{\sin \angle CBD}.$$

Следовательно,

$$BD = \frac{CD \sin \angle BCD}{\sin \angle CBD} = \frac{m \sin \alpha \sin (180^\circ - (\beta + \gamma))}{\sin \beta \sin (\gamma - \alpha)} = \frac{m \sin \alpha \sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin (\gamma - \alpha)}.$$

Ответ: $\dfrac{m \sin \alpha \sin (\beta + \gamma)}{\sin \beta \sin (\gamma - \alpha)}$. ◀

Задача 4. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC, $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle C = 105^\circ$ (рис. 3.3). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если радиус окружности, описанной около треугольника BDC, равен $8\sqrt{6}$ см.

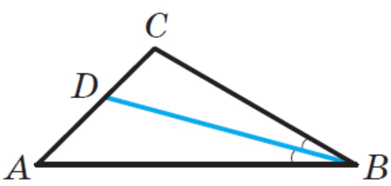

Рис. 3.3

Решение. Пусть R_1 — радиус окружности, описанной около треугольника BDC, $R_1 = 8\sqrt{6}$ см.

Поскольку отрезок BD — биссектриса треугольника, то $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 15^\circ$.

Из треугольника BDC получаем:

$$\angle BDC = 180^\circ - (\angle CBD + \angle C) = 180^\circ - (15^\circ + 105^\circ) = 60^\circ.$$

По следствию из теоремы синусов $\dfrac{BC}{2 \sin \angle BDC} = R_1$. Отсюда

$$BC = 2R_1 \sin \angle BDC = 2 \cdot 8\sqrt{6} \sin 60^\circ = 24\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Из треугольника ABC получаем:

$$\angle A = 180^\circ - (\angle ABC + \angle C) = 180^\circ - (30^\circ + 105^\circ) = 45^\circ.$$

Пусть R — искомый радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Тогда $\dfrac{BC}{2 \sin A} = R$, отсюда

$$R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{24\sqrt{2}}{2 \sin 45^\circ} = 24 \text{ (см)}.$$

Ответ: 24 см. ◀