

10. Среднее значение

Рассмотрим данные о производстве пшеницы в России в 1995–2001 гг. (в миллионах тонн). Они приведены в таблице 1.

Таблица 1. Производство пшеницы в России в 1995–2001 гг.

Год	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Производство, млн. тонн	30,1	34,9	44,3	27,0	31,0	34,5	47,0

Как видно из таблицы 1, производство пшеницы в разные годы различается. Оно зависит от погодных условий, площади посева и других обстоятельств. Поэтому производство пшеницы за один год не дает полного представления об уровне производства пшеницы в стране. Для этой цели лучше использовать среднее значение за ряд лет. По данным таблицы мы можем вычислить среднее производство пшеницы за 7 лет. Для этого надо сложить годовые сборы пшеницы и затем сумму разделить на число слагаемых. В данном случае получаем

$$(30,1 + 34,9 + 44,3 + 27,0 + 31,0 + 34,5 + 47,0) : 7 \approx 35,5.$$

Получаем, что среднее производство пшеницы в России за рассматриваемый период 1995–2001 гг. составляло приблизительно 35,5 млн. тонн в год. Вычисленное нами значение называется *средним арифметическим* или просто *средним*.



Определение. *Средним арифметическим* нескольких чисел называется число, равное отношению суммы этих чисел к их количеству.

Другими словами, среднее арифметическое — это дробь, в числителе которой стоит сумма чисел, а в знаменателе — их количество.

К вычислениям средних значений прибегают во многих подобных задачах.

Если мы нанесем данные о производстве пшеницы из таблицы 1 на числовую ось в виде точек, а среднее значение в виде вертикальной черты, то получим рисунок 1.

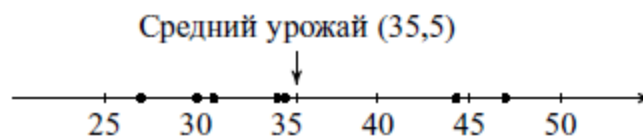


Рис. 1. Производство пшеницы в России и среднее значение (млн. тонн)

Видно, что пять чисел оказались меньше среднего значения, а два больше. При этом два числа 34,9 и 34,5 довольно близки к среднему. Среднее арифметическое нескольких чисел показывает, в каком месте числовой прямой группируются эти числа. Оно является в некотором смысле «центром» рассматриваемого набора чисел. Поясним, что здесь означает слово «центр». Представим, что числовая ось является стержнем, на который подвешены гири одинаковой массы в точках, соответствующих данным числам, как это показано на рисунке 2.

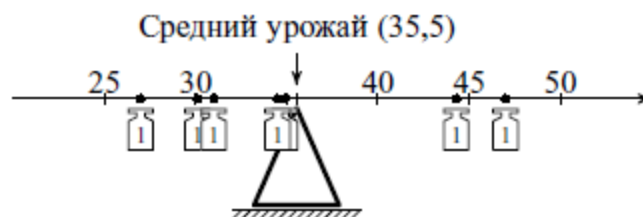


Рис. 2. Среднее арифметическое — точка равновесия

На стержне существует такая точка, на которую можно «положить» весь стержень с гирями так, что гири останутся в равновесии. Этой точкой на стержне будет среднее арифметическое. В физике эту точку называют «центром масс».

Этот пункт рассказал о том, что среднее арифметическое числового набора характеризует в целом положение этого набора на числовой прямой.

11. Вычислите среднее арифметическое чисел:

а) 1, 2, 3, 4, 5; б) 1, 2, 3, 4, 10; в) 1, 2, 3, 4, 100; г) 1, 2, 3, 4, 1000.

12. Отметьте числа на числовой прямой. Вычислите среднее арифметическое этих чисел и тоже отметьте его на числовой прямой:

а) 1, 2, 3, 4, 5; б) 2, 3, 4, 5, 6; в) 3, 4, 5, 6, 7; г) 10, 11, 12, 13, 14.

Какую закономерность в поведении среднего значения можно заметить в каждом из случаев?

11. Медиана

Не только среднее арифметическое показывает, где на числовой прямой располагаются числа какого-либо набора и где их центр. Другим показателем является **медиана**. Медианой набора чисел называют такое число, которое разделяет набор на две равные по численности части. (Вместо «медиана» можно было бы сказать «середина».) Сначала мы на примерах поясним, как найти медиану, а затем дадим строгое определение.



Пример 1. Возьмем какой-нибудь набор различных чисел, например 1, 4, 7, 9, 11. Подберем число m так, чтобы в наборе оказалось поровну чисел, которые меньше и которые больше чем m .

На пробу возьмем $m = 5$. В нашем наборе два числа меньше чем 5 (это 1 и 4), и три числа больше чем 5: это 7, 9 и 11. Значит, число 5 не годится.

Теперь возьмем $m = 7$. Меньше числа 7 два числа, больше числа 7 тоже два числа. Следовательно, число 7 делит этот набор на две равные по численности части: (1 и 4) и (9 и 11), само оставаясь посередине набора. Число 7 — медиана набора чисел 1, 4, 7, 9, 11.

В этом примере набор состоял из 5 чисел, записанных в порядке возрастания. Медианой в этом случае оказывается число, стоящее в точности посередине.



Пример 2. Рассмотрим набор 1, 3, 6, 11. Числа тоже записаны по возрастанию, но их четыре, поэтому среди них нет числа, стоящего точно посередине. Любое число из интервала (3, 6) разделяет наш набор на две равные по численности части (1 и 3) и (6 и 11). Медианой этого набора служит любое число, которое больше 3 и меньше 6. По определению в качестве медианы в таких случаях берут центр срединного интервала. В нашем случае это центр интервала (3, 6). Это полусумма его концов

$$\frac{3+6}{2} = 4,5.$$

Медианой этого набора считают число 4,5.



Определение 1. Медианой набора различных чисел называют такое число (скажем m), которое обладает следующим свойством: количество чисел набора, меньших либо равных m , равно количеству чисел набора, больших либо равных m .

Определение 2. Медианой набора n чисел (среди которых могут быть совпадающие), называется

- число, стоящее посередине (на месте с номером $[n/2] + 1$) в упорядоченном по возрастанию ряду этих чисел, если n нечетно,
- полусумма чисел, стоящих на средних местах (с номерами $n/2$ и $n/2 + 1$) в упорядоченном наборе этих чисел, если n четно.

Можно показать, что для набора различных чисел определение 2 дает тот же результат, что и определение 1.

6. Найдите медиану следующих наборов чисел:

- а) 2, 4, 8, 9; б) 1, 3, 5, 7, 8, 9; в) 10, 11, 11, 12, 14, 17, 18, 22.

12. Наибольшее и наименьшее значение. Размах

Иногда интересны не только средние значения или медианы, но и другие величины, связанные с наборами различных чисел.

Если мы хотим узнать, кто победил в прыжках в длину в соревнованиях класса, то выберем того, кто прыгнул дальше всех, т. е. выберем наибольший результат.

В соревнованиях по бегу победителем считается тот, кто пробежал быстрее всех, т. е. показал наименьшее время. **Наибольшие** и **наименьшие значения** часто интересуют нас в самых разных областях. Нам всегда интересно, какова наименьшая цена на некоторый товар. Увидев новый автомобиль, мы интересуемся, какую наибольшую скорость он может развить. Иногда стремление к рекордам возникает у человека в самых неожиданных случаях. Существует Книга рекордов Гиннеса, в которой написано, сколько часов человек может простоять на одной ноге, кто выпустил больше всего мыльных пузырей, у кого самый длинный нос и т. п.



Определение. Разность между наибольшим и наименьшим числом называется **размахом** набора чисел.

Размах дает нам представление о разбросе данных.

В уже знакомой нам таблице 6 содержатся данные о производстве пшеницы.

Самый большой урожай пшеницы в эти годы был получен в 2001 г. Он составил 47,0 млн. тонн. Самый маленький урожай 27,0 млн. тонн был собран в 1998 г. Размах производства пшеницы в эти годы составил 20 млн. тонн. Это довольно большая величина по сравнению со средним значением производства в эти годы 35,5 млн. тонн. На производство



Упражнения

1. Найдите наибольшее и наименьшее значение, размах, среднее значение и медиану набора чисел:

а) 12, 7, 25, 3, 19, 15; б) 17, 19, 5, 41, 47, 13, 19.

2. В таблице 7 приведены данные о производстве зерновых в России в 2000–2006 гг.

Таблица 7. Производство зерна в России

Показатель	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Производство зерновых, млн. т	65,5	85,2	86,6	67,2	78,1	78,2	78,6
Урожайность зерновых, ц/га	15,6	19,4	19,6	17,8	18,8	18,5	18,9
Производство пшеницы, млн. т	34,5	47,0	50,6	34,1	45,4	47,7	45,0

По таблице 7 найдите наибольшее, наименьшее значение и размах:

а) производства зерновых в 2000–2006 гг.;

б) производства пшеницы в 2000–2006 гг.;

в) урожайности зерновых в 2000–2006 гг.

Домашнее задание: Прочитать тест, выучить определения, выполнить задания после каждого пункта